



5 havo
Wiskunde A
SE4
26 februari 2025
120 minuten

Versie 1

Dit schoolexamen bestaat uit 14 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 45 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.

Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Toegestane hulpmiddelen: Grafische rekenmachine

FORMULEBLAD

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$) (met steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden ($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Hygiëne op school

In 2018 verschenen er berichten in de media over de (toilet)hygiëne op Nederlandse basis- en middelbare scholen. De berichten waren gebaseerd op onderzoeken onder respectievelijk leraren die werkzaam waren binnen het basis- of voortgezet onderwijs, leerlingen tussen de 5 en 16 jaar oud en ouders met een kind tussen de 5 en 16 jaar oud. In totaal namen 630 leraren, 452 leerlingen en 626 ouders deel aan het onderzoek. We nemen aan dat elk van de drie steekproeven aselekt en representatief was.

In de steekproef van de leerlingen gaven 194 van de 452 leerlingen aan regelmatig moeite te hebben met opletten tijdens de les, omdat zij op sommige momenten naar het toilet moeten, maar niet gaan.

- 4p **1** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage Nederlandse leerlingen tussen de 5 en 16 jaar oud, waarvoor het bovenstaande geldt. Geef de percentages in je antwoord in gehelen.

Van de 452 leerlingen in de steekproef zaten er 302 op de basisschool en 150 op de middelbare school. Precies de helft van de basisschoolleerlingen gaat op school niet naar het toilet. Bij de middelbare scholieren is dit 60%.

In deze steekproef is er dus een verschil tussen basisschoolleerlingen en middelbare scholieren in het deel dat op school niet naar het toilet gaat.

- 4p **2** Onderzoek met behulp van het formuleblad of dat verschil groot, middelmatig of gering is.

Veel ouders vermoeden dat een betere hygiëne op een school samengaat met een lager percentage ziekmeldingen onder de leerlingen van de betreffende school.

Neem aan dat de hygiëne van een school uitgedrukt wordt in een score tussen 0 en 100 waarbij geldt: hoe hoger de score, hoe beter de hygiëne van de betreffende school.

- 2p **3** Geef op de uitwerkbijlage een schets van een mogelijke puntenwolk die het vermoeden ondersteunt dat een betere hygiëne samengaat met een lager percentage ziekmeldingen.

Random close packing



Het vullen van een glazen pot met knikkers is een voorbeeld van random close packing. Bij random close packing wordt een hoeveelheid identieke voorwerpen willekeurig in een pot of bak gedaan, waarna er wordt geschud om de beschikbare ruimte zo goed mogelijk op te vullen.

Bij bolvormige voorwerpen, zoals knikkers, blijkt dat het gedeelte dat gevuld wordt altijd ongeveer even groot is. Het percentage gevulde ruimte is normaal verdeeld met een gemiddelde van 64,0. In 95% van de gevallen ligt het percentage gevulde ruimte tussen de 63,6 en 64,4.

Op grond van dit gegeven kun je de standaardafwijking van het percentage gevulde ruimte berekenen.

3p **4** Bereken deze standaardafwijking.

Als je precies weet welk percentage van een pot gevuld is, kun je de volgende formule gebruiken om het aantal knikkers K te berekenen:

$$K = 0,0191 \cdot p \cdot \frac{I_{pot}}{d^3}$$

Hierin is p het percentage gevulde ruimte, I_{pot} de inhoud van de glazen pot in cm^3 en d de diameter van de knikkers in cm.

Een glazen pot met een inhoud van 1050 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers met een diameter van 0,95 cm. Het aantal knikkers in de pot is afhankelijk van het percentage gevulde ruimte.

3p **5** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het aantal knikkers K in de pot. Maak gebruik van de gegevens uit vraag 4. Rond af op helen.

Lees verder >>>

Licht en kleur

Een vel helderwit papier ziet er niet altijd helderwit uit: bij kunstlicht is de kleur van het papier anders dan bij kaarslicht of bij het licht van de middagzon. Dat wordt veroorzaakt door het omgevingslicht. Een maat voor dit omgevingslicht is de kleurtemperatuur die wordt gemeten in kelvin (K).

Professionele fotografen gebruiken in plaats van kleurtemperatuur liever een andere maat, de miredwaarde. In de tabel vind je voor verschillende soorten licht de kleurtemperatuur T en de bijbehorende miredwaarde M .

tabel

omgevingslicht	kleurtemperatuur T (K)	miredwaarde M (mired)
kaarslicht	1200	833
zonsopkomst en zonsondergang	2000	500
halogeenlamp	3200	312
middagzon	6000	167

Er is een omgekeerd evenredig verband tussen de kleurtemperatuur T en de miredwaarde M .

- 3p **6** Toon aan dat de tabel hiermee in overeenstemming is. Gebruik alle waarden in de tabel.

Een professionele fotograaf gebruikt altijd zijn cameraflitser. Voor een goede foto is het een eis dat de kleurtemperatuur van de cameraflitser gelijk is aan de kleurtemperatuur van het omgevingslicht. Als dat niet het geval is, gebruikt hij een filter om de kleurtemperatuur te verhogen of te verlagen.

Om de miredwaarde van het benodigde filter te bepalen, wordt de volgende formule gebruikt:

$$T = \frac{1000000}{200 + M_f}$$

In deze formule is T de kleurtemperatuur van het omgevingslicht in kelvin en M_f de miredwaarde van het gebruikte filter.

Een fotograaf maakt een foto in zijn studio die wordt verlicht door studiolampen met een kleurtemperatuur van 3000 K. Om te kunnen flitsen met dezelfde kleurtemperatuur moet de fotograaf zijn cameraflitser voorzien van een filter.

- 3p **7** Bereken de miredwaarde van dit filter.

Lees verder >>>

Omdat de miredwaarde van een filter wordt bepaald op basis van de kleurtemperatuur van het omgevingslicht, is het handig om de formule te herleiden tot een formule van de vorm

$$M_f = \frac{a}{T} + b \text{ waarbij } a \text{ en } b \text{ getallen zijn.}$$

3p **8** Laat deze herleiding zien.

BMI, hoger dan je denkt

Jaarlijks wordt voor een onderzoek aan een groot aantal personen gevraagd hun lengte te schatten. We noemen deze lengte de geschatte lengte. Daarnaast wordt de lengte nauwkeurig door een onderzoeker gemeten. We noemen deze lengte de werkelijke lengte. De geschatte lengte en de werkelijke lengte worden vervolgens met elkaar vergeleken. Het blijkt dat mensen in het algemeen hun lengte te hoog schatten.

In het onderzoek van een bepaald jaar schatten vrouwen hun lengte gemiddeld 0,9 cm hoger dan hun werkelijke lengte. De standaardafwijking van de werkelijke lengte was 6,0 cm. De standaardafwijking van de geschatte lengte was 6,2 cm.

3p **9** Bepaal met behulp van een vuistregel op het formuleblad of het verschil tussen de werkelijke lengte en de geschatte lengte gering, middelmatig of groot is.

In het algemeen schatten mensen hun lengte dus te hoog. Tegelijkertijd geldt dat ze hun gewicht te laag schatten: ze denken minder te wegen dan ze in werkelijkheid wegen. Dit heeft gevolgen voor de *BMI* (Body Mass Index). Dit is een maat voor het al dan niet te zwaar zijn van een persoon. De formule voor de *BMI* luidt:

$$BMI = \frac{G}{L^2}$$

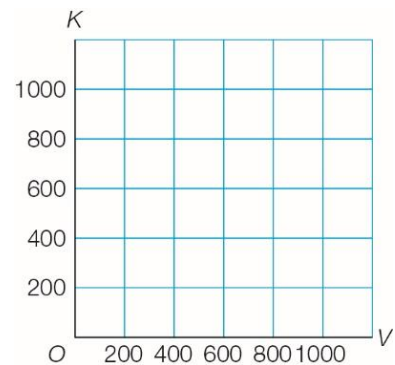
In deze formule is G het gewicht in kg en L de lengte in meters. Als de *BMI* van iemand groter is dan 25, spreekt men van overgewicht. Uiteraard behoren mensen hun *BMI* te berekenen met behulp van hun werkelijke lengte en gewicht. Als mensen echter hun geschatte lengte en gewicht gebruiken, levert dat een andere *BMI* op.

3p **10** Beredeneer dit met behulp van de formule voor de *BMI*, zonder voor G en L getallen in te vullen.

Lees verder >>>

Boekhandel

Boekhandelaar Egon verkoopt kinderboeken en boeken voor volwassenen. Hij heeft in zijn boekwinkel slechts plaats voor 1200 boeken, waarvan minstens de helft voor kinderboeken. Verder wil hij minstens 200 boeken voor volwassenen, maar ook minstens twee keer zoveel kinderboeken als boeken voor volwassenen. Noem het aantal kinderboeken K en het aantal boeken voor volwassenen V .



- 4p **11** Welke ongelijkheden horen bij de situatie?
- 3p **12** Teken op de uitwerkbijlage het gebied dat bij de ongelijkheden van vraag 11 hoort.

Stel dat het aanbieden van een kinderboek uiteindelijk minder geld oplevert dan het aanbieden van een boek voor volwassenen.

- 3p **13** Onderzoek met de figuur van vraag 12 welke aantallen boeken in de winkel van Egon het meeste geld zullen opleveren.

Elfstedentocht

Een wiskundige heeft een formule opgesteld voor het aantal te verwachten Elfstedentochten E_w in de 21e eeuw, waarbij rekening gehouden is met een geleidelijke toename van de wintertemperatuur in de 21e eeuw en met het feit dat niet iedere mogelijke Elfstedentocht werkelijk gereden zal worden:

$$E_w = \frac{0,74}{V} \cdot (p - p \cdot 0,60^V)$$

Hierin is V het verschil tussen de wintertemperatuur aan het einde van de 21e eeuw en de gemiddelde wintertemperatuur van de 20e eeuw in $^{\circ}\text{C}$ en p is het percentage werkelijk gereden tochten als een Elfstedentocht mogelijk is.

De organisatie van de Elfstedentocht probeert het percentage p door nog betere voorbereidingen te verhogen tot 65. Men verwacht dat V $3,6^{\circ}\text{C}$ zal zijn.

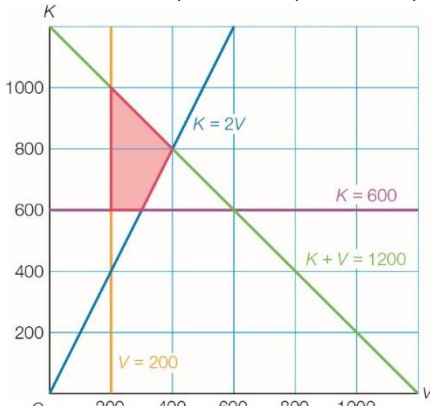
Als we aannemen dat V inderdaad $3,6^{\circ}\text{C}$ zal zijn, dan is de formule van E_w te herschrijven tot de vorm: $E_w = a \cdot p$

- 4p **14** Laat zien hoe je de formule van E_w kunt herschrijven tot de vorm $E_w = a \cdot p$ en bereken a .

	Hygiëne op school (2024 II)																	
1	De steekproefproportie is $194/452 = 0,429...$ De grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie zijn $0,429 \dots \mp \sqrt{\frac{0,429...(1-0,429...)}{452}}$ Dit geeft het interval $[0,382...; 0,475...]$ Het antwoord: $[38, 48](\%)$	1 1 1 1																
2	Het berekenen van de absolute aantallen leerlingen per categorie Het opstellen van een juiste kruistabel	1 1																
	<table><tr><td></td><td>basisschool</td><td>middelbare school</td><td>(totaal)</td></tr><tr><td>liever niet naar toilet</td><td>151</td><td>90</td><td>(241)</td></tr><tr><td>overig</td><td>151</td><td>60</td><td>(211)</td></tr><tr><td>(totaal)</td><td>(302)</td><td>(150)</td><td>(452)</td></tr></table>		basisschool	middelbare school	(totaal)	liever niet naar toilet	151	90	(241)	overig	151	60	(211)	(totaal)	(302)	(150)	(452)	
	basisschool	middelbare school	(totaal)															
liever niet naar toilet	151	90	(241)															
overig	151	60	(211)															
(totaal)	(302)	(150)	(452)															
	$\phi = \frac{151 \cdot 60 - 90 \cdot 151}{\sqrt{241 \cdot 302 \cdot 150 \cdot 211}}$ $\phi = -0,09... ;$ (dit ligt tussen $-0,2$ en $0,2$) dus het verschil is gering	1 1																
3	Het schetsen van een puntenwolk waarbij de punten (dicht) in de buurt van een dalende trendlijn liggen. <i>Opmerking: Voor dit antwoord mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend</i>	2																

4	Random close packing (2016 pilot) Volgens de vuistregels wijkt $63,6$ tweemaal de standaardafwijking af van $64,0$ $\frac{64,0-63,6}{2}$ of $\frac{64,4-64,0}{2}$ Het antwoord: $0,2$	1 1 1
5	Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van p is $[63,6; 64,4]$ $p = 63,6$ geeft $K = 0,0191 \cdot 63,6 \cdot \frac{1050}{0,95^3}$ en $p = 64,4$ geeft $= 0,0191 \cdot 64,4 \cdot \frac{1050}{0,95^3}$ Het antwoord: 1488 tot en met 1506 (knikkers) of $[1488, 1506]$ (knikkers) <i>Opmerking: Voor antwoorden waarbij niet duidelijk is of de waarden 1488 en 1506 tot het betrouwbaarheidsinterval horen (zoals 'tussen 1488 en 1506 knikkers'), 1 scorepunt in mindering brengen.</i>	1 1 1 1 1

6	Licht en kleur (2014 II) $1200 \cdot 833 \approx 1$ miljoen, $2000 \cdot 500 \approx 1$ miljoen, $3200 \cdot 312 \approx 1$ miljoen en $6000 \cdot 167 \approx 1$ miljoen Alle producten zijn (bij benadering) gelijk (dus er is sprake van een omgekeerd evenredig verband) <i>Opmerkingen</i> - Voor elke ontbrekende of foutieve berekening 1 scorepunt in mindering brengen tot een maximum van 2.	2 1
7	De vergelijking $\frac{1000000}{200+Mf} = 3000$ moet worden opgelost. Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost	1 1
8	Het antwoord: 133 (mired) (of nauwkeuriger). De formule herleiden tot $200 + Mf = \frac{1000000}{T}$	1 2 1

	Dit geeft $Mf = \frac{1000000}{T} - 200$	
9	BMI, hoger dan je denkt (2016,II) Hier moet de effectgrootte worden bepaald $E = \frac{0,9}{\frac{1}{2}(6,0+6,2)} \approx 0,1$ (of nauwkeuriger)	1 1
10	De conclusie: (dit is kleiner dan 0,4 dus) het verschil is gering Met eigen schattingen wordt G kleiner (dus de teller wordt kleiner) en daarmee wordt de BMI kleiner (dus is er bij minder mensen sprake van overgewicht) L wordt groter (dus L2 wordt ook groter) Er wordt door een groter getal gedeeld en daarmee wordt de BMI kleiner (dus is er bij minder mensen sprake van overgewicht)	1 1 1 1
11	Boekhandel $K + V \leq 1200$, $K \geq 600$, $V \geq 200$, $K \geq 2V$	4
12		3
13	zoveel mogelijk boeken voor volwassenen uit de figuur volgt $V = 400$ en $K = 800$ dus 400 boeken voor volwassenen en 800 kinderboeken	1 1 1
14	Elfstedentocht (2011, II pilot) $Ew = \frac{0,74}{3,6} (p - p \cdot 0,60^{3,6})$ $Ew \approx 0,206 \cdot (p - p \cdot 0,16)$ $Ew \approx 0,206 \cdot 0,84 \cdot p$ $Ew \approx 0,173 \cdot p$, dus $a \approx 0,17$ (of nauwkeurige)	1 1 1 1